Baltic Way

15 November 2025, Riga, Latvia — Version: Danish

Tid til rådighed: 4 timer og 30 minutter.
Der må stilles spørgsmål de første 30 minutter.
Tilladte hjælpemidler: kun skrive- og tegneredskaber.

Opgave 1 Findes der en følge af heltal $a_1, a_2, \ldots$ sådan at der for alle heltal $d \neq 0$, findes præcis 2025 forskellige par af indekser (i, j) med $a_i - a_j = d$?

Opgave 2 Lad $a_1, a_2, \ldots$ være en følge af reelle tal sådan at

$$\{a_n\}\lfloor a_{n+1}\rfloor = \lfloor a_n\rfloor\{a_{n+1}\}$$

for alle positive heltal n. Bevis at der findes et reellt tal λ sådan at $\{a_m\}\lfloor a_m\rfloor = \lambda$ for uendeligt mange positive heltal m.

Bemærk: For et reellt tal x betegner $\lfloor x\rfloor$ det største heltal mindre end eller lig med x, og $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$.

Opgave 3 Lad $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ være en funktion sådan at

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{Q}$. Bevis at der findes et $\alpha \in \mathbb{R}$ sådan at $f(x) \geq \alpha x$ for alle $x \in \mathbb{Q}$.

Opgave 4 Find alle funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådan at

$$(f(a-c) + f(b-d))\,(f(a) + f(b)) = f(ad - bc) + f\,(f(a) + f(b) - ac - bd)$$

for alle reelle tal a, b, c, d.

Opgave 5 Lad n være et positivt heltal og lad $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ være positive reelle tal som opfylder

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{x_1^2 + x_n^2}{2}.$$

Bevis at

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n x_1 x_n.$$

Opgave 6 $n \geq 3$ venner spiller stikbold. Til at starte med er alle spillere i live. Når en levende spiller A rammer en anden levende spiller B med bolden, bliver B dræbt af A, og alle spillere, som B har dræbt, bliver genoplivet af A (og er dermed ikke længere døde). Kun én person kan blive ramt af bolden af gangen.

Bestem the mindste antal af drab, sådan at blandt to vilkårlige spillere har den ene på et tidspunkt genoplivet den anden.

Opgave 7 Lad n være et positivt heltal. En $n \times n \times n$ kube består af n^3 enhedskuber. En $1 \times 1 \times n$ kasse af enhedskuber kaldes *nål*, som kan vendes i tre forskellige retninger. Find det største heltal K, så det er muligt at placere $3K$ nåle, K i hver retning, sådan at ingen af dem deler en enhedskube.

Opgave 8 En følge af ikke-negative heltal $a_1, \ldots, a_n$ kaldes *selv-deskriptiv* hvis

$$a_k = |\{i \mid a_i \geq k\}|$$

for alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, dvs. a_k er antallet af elementer i følgen, der er større eller lig med k, for alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.

For alle positive heltal n, find antallet af selv-deskriptive følger af længde n.

Opgave 9 En *Baltisk polyiamant* er en n-kant med sidelængder $n, n-1, \ldots, 2, 1$ i præcis den rækkefølge, og hvor alle interne vinkler er $120°$ eller $240°$. Bevis at for alle Baltiske polyiamanter er n delig med 6.

Opgave 10 Et positivt heltal med 9 cifre kaldes *suspekt* hvis det indeholder alle cifre fra 1 til 9. Et tal kaldes *skummelt* hvis det er suspekt, og for alle $k = 1, \ldots, 9$, gælder det, at det k'te ciffer i tallet er lig med positionen af cifret k i tallet. For eksempel er 847296315 skummelt:

- Det første ciffer er 8, hvilket er positionen af 1 i tallet.
- Det andet ciffer er 4, hvilket er positionen af 2 i tallet.
- Det tredje ciffer er 7, hvilket er positionen af 3 i tallet osv.

Bevis at antallet af skumle tal er lige.

Opgave 11 Lad $A_1, \ldots, A_n$ være en følge af punkter i det euklidiske plan. Punkterne må gerne være sammenfaldende, men mindst to skal være forskellige. En *baltisk kæde* er en rute givet ved en permutation $B_1, \ldots, B_n$ af punkterne $A_1, \ldots, A_n$. Længden af en baltisk kæde er

$$|B_1B_2| + |B_2B_3| + \cdots + |B_{n-1}B_n| + |B_nB_1|,$$

hvor $|PQ|$ betegner længden mellem punkterne P og Q.

Lad K og L være længder for to baltiske kæder givet ved de samme n punkter. For et givet n, bestem den maksimale værdi af K/L for alle følger $A_1, \ldots, A_n$.

Opgave 12 Lad ABC være en spidsvinklet trekant hvor $AB < AC$. I er centrum for den indskrevne cirkel og den omskrevne cirkel er ω. Linjen AI skærer siden BC i D. Lad T være på ω sådan at $AT \parallel BC$. Linjen TI skærer ω igen i $P \neq T$, og den omskrevne cirkel til trekant APD igen i $Q \neq P$. Bevis at $|AI| = |DQ|$.

Opgave 13 Lad $ABCD$ være en konveks, indskrivelig firkant hvor linjerne AB og CD skærer i E. Et punkt P ligger inde i firkant $ABCD$ sådan at

$$\angle BAP = \angle PCB \quad \text{og} \quad \angle CBP = \angle PDC.$$

Bevis at $PE \perp BC$.

Opgave 14 Lad ABC være en spidsvinklet trekant hvor $AB < AC$. H er højdernes skæringspunkt, og den omskrevne cirkel er ω. Punktet P ligger på buestykket BC af ω som indeholder A sådan at $\angle PCB + \angle ACB = 90°$. Punktet R ligger på linjestykket AC sådan at $|BR| = |CR|$. Bevis at $\angle HPR = \angle ACB$.

Opgave 15 Lad ABC være en spidsvinklet, ikke-ligebenet trekant. Midtnormalen til BC skærer AC og AB i henholdsvis A_b og A_c. Definer B_a, B_c, C_a og C_b på tilsvarende vis. Bevis at centrum for de omskrevne cirkler til trekant $ABC, A_bB_cC_a$, og $A_cB_aC_b$ ligger på linje.

Opgave 16 Lad a, b, c og n være positive heltal sådan at $abc = 10^n - 1$. Lad $S(x)$ betegne tværsummen af et positivt heltal x. Bevis at

$$S(a) + S(b^2) + S(c^4) \geq \sqrt[3]{243n}.$$

Opgave 17 Et positivt heltal kaldes *strålende* hvis dets positive divisorer kan opdeles i to disjunkte mængder sådan at der er lige mange elementer i hver mængde, og summen af elementerne i hver mængde er ens.

Bestem samtlige mulige værdier af antallet af positive divisorer, som et strålende tal kan have.

Opgave 18 Find alle funktioner $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ sådan at $f(2) = 1$ og

$$\operatorname{lcm}(f(a+b), f(b)) \mid \operatorname{lcm}(a + f(b), b)$$

for alle positive heltal a, b.

Opgave 19 På en tavle står der 100 positive heltal. Georg spiller et enmandsspil, hvor et *træk* består af at slette to positive heltal a og b på tavlen som opfylder at $a \mid b$, og derefter skrive tallet b/a på tavlen. Spillet stopper hvis Georg ikke kan lave nogle træk.

Bestem det største positive heltal N som opfylder følgende: Der findes 100 positive heltal sådan at hvis disse heltal står på tavlen, så kan Georg

- slutte spillet med kun ét tal tilbage på tavlen, og
- slutte spillet med præcis N tal tilbage på tavlen.

Opgave 20 Bestem alle positive heltal n sådan at der findes en permutation $a_1, \ldots, a_n$ af $1, \ldots, n$, sådan at tallene $a_1, 2a_2, \ldots, na_n$ alle er parvist forskellige modulo n.