Balti Tee

15. november 2025, Riia, Läti

Version: Estonian

Lahendamisaega on 4 tundi ja 30 minutit.
Küsimusi võib esitada esimese 30 minuti jooksul.
Ainult kirjutus- ja joonestusvahendid on lubatud.

Ülesanne 1 Kas leidub selline täisarvude jada $a_1, a_2, \ldots$, et iga täisarvu $d \neq 0$ jaoks leidub täpselt 2025 erinevat indeksite paari (i, j), mille korral $a_i - a_j = d$?

Ülesanne 2 Olgu $a_1, a_2, \ldots$ selline reaalarvude jada, et iga positiivse täisarvu n korral

$$\{a_n\}\lfloor a_{n+1}\rfloor = \lfloor a_n\rfloor\{a_{n+1}\}.$$

Tõesta, et leidub reaalarv λ, nii et $\{a_m\}\lfloor a_m\rfloor = \lambda$ lõpmata paljude positiivsete täisarvude m korral.

Märkus: Reaalarvu x korral tähistab $\lfloor x\rfloor$ suurimat täisarvu, mis ei ületa x, ning $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$.

Ülesanne 3 Olgu $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ funktsioon, mis rahuldab kõigi $x, y \in \mathbb{Q}$ korral võrratust

$$f(x) + f(y) \geqslant f(x + y).$$

Tõesta, et leidub selline $\alpha \in \mathbb{R}$, et $f(x) \geqslant \alpha x$ kõigi $x \in \mathbb{Q}$ korral.

Ülesanne 4 Leia kõik funktsioonid $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis rahuldavad kõigi reaalarvude a, b, c, d korral võrdust

$$(f(a-c) + f(b-d))\,(f(a) + f(b)) = f(ad - bc) + f\,(f(a) + f(b) - ac - bd)\,.$$

Ülesanne 5 Olgu n positiivne täisarv ja $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ sellised positiivsed reaalarvud, et

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{x_1^2 + x_n^2}{2}.$$

Tõesta, et

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant n x_1 x_n.$$

Ülesanne 6 $n \geqslant 3$ sõpra mängivad rahvastepalli. Alguses on kõik mängijad vabad. Kui vaba mängija A *tabab* teist vaba mängijat B, siis A *vangistab* B ja vabastab kõik mängijad, kes on parasjagu B poolt vangistatud. Kaks tabamust ei saa toimuda samal ajal.

Leia vähim tabamuste arv, pärast mida on võimalik, et igast kahest mängijast vähemalt üks on teise vabastanud.

Ülesanne 7 Olgu n paaris positiivne täisarv. Kuup $n \times n \times n$ koosneb n^3 ühikkuubist. Nimetame *nõelaks* n ühikkuubist koosnevat $1 \times 1 \times n$ risttahukat; nõelal on kolm võimalikku orientatsiooni. Leia suurim täisarv K, mille korral on võimalik kuubis valida $3K$ nõela, K igas orientatsioonis, nii et ühelgi kahel nõelal ei leidu ühist ühikkuupi.

Ülesanne 8 Mittenegatiivsete täisarvude järjendit $a_1, \ldots, a_n$ nimetatakse *ennastkirjeldavaks*, kui

$$a_k = |\{i \mid a_i \geqslant k\}|$$

iga $k \in \{1, \ldots, n\}$ korral, st iga element a_k võrdub elementide arvuga, mille väärtus on vähemalt k.

Leia iga positiivse täisarvu n korral pikkusega n ennastkirjeldavate järjendite arv.

Ülesanne 9 *Balti polüamond* on n-nurk, mille küljepikkused on $n, n-1, \ldots, 2, 1$ täpselt selles järjekorras ning mille kõik sisenurgad on 120° või 240°. Tõesta, et iga Balti polüamondi korral $6 \mid n$.

Ülesanne 10 Üheksakohalist naturaalarvu nimetatakse *ilusaks*, kui see sisaldab kõiki numbreid ühest üheksani. Arvu nimetatakse *imeliseks*, kui see on ilus ja iga $k = 1, \ldots, 9$ korral on arvu k. number võrdne numbri k positsiooniga arvus. Näiteks on arv 847296315 imeline, sest

- esimene number on 8, mis on ühtlasi numbri 1 positsioon arvus,
- teine number on 4, mis on ühtlasi numbri 2 positsioon arvus,
- kolmas number on 7, mis on ühtlasi numbri 3 positsioon arvus, ja nii edasi.

Näita, et imeliste arvude arv on paarisarv.

Ülesanne 11 Olgu $A_1, \ldots, A_n$ punktide järjend tasandil. Mõned punktid võivad kokku langeda, kuid järjendis on vähemalt kaks erinevat punkti. *Balti tee* on teekond, mis on määratud punktide $A_1, \ldots, A_n$ permutatsiooniga $B_1, \ldots, B_n$. Balti tee pikkus on

$$|B_1B_2| + |B_2B_3| + \cdots + |B_{n-1}B_n| + |B_nB_1|,$$

kus $|PQ|$ tähistab punktide P ja Q vahelist kaugust.

Olgu K ja L kahe Balti tee pikkused sama n punktist koosneva järjendi korral. Leia iga $n \geqslant 2$ korral jagatise K/L maksimaalne võimalik väärtus üle kõigi võimalike järjendite $A_1, \ldots, A_n$.

Ülesanne 12 Olgu ω teravnurkse kolmnurga ABC, kus $AB < AC$, ümberringjoon ning I nurgapoolitajate lõikepunkt. Sirge AI lõikub küljega BC punktis D. Olgu T punkt ringjoonel ω, nii et $AT \parallel BC$. Sirge TI lõikub ringjoonega ω teist korda punktis P ja kolmnurga APD ümberringjoonega teist korda punktis Q. Tõesta, et $AI = DQ$.

Ülesanne 13 Kõõlnelinurga $ABCD$ külgede AB ja CD pikendused lõikuvad punktis E. Punkt P asub nelinurga $ABCD$ sees ning rahuldab tingimusi

$$\angle BAP = \angle PCB \quad \text{ja} \quad \angle CBP = \angle PDC.$$

Tõesta, et $PE \perp BC$.

Ülesanne 14 Olgu ω teravnurkse kolmnurga ABC, kus $AB < AC$, ümberringjoon ning H kõrguste lõikepunkt. Ringjoone ω punkti A sisaldaval kaarel BC asub punkt P, nii et $\angle PCB + \angle ACB = 90°$. Punkt R lõigul AC rahuldab tingimust $BR = CR$. Tõesta, et $\angle HPR = \angle ACB$.

Ülesanne 15 Teravnurkses erikülgses kolmnurgas ABC lõikub külje BC keskristsirge sirgetega AC ja AB vastavalt punktides A_b ja A_c. Punkid B_c, B_a, C_a ja C_b defineeritakse samamoodi. Tõesta, et kolmnurkade ABC, $A_bB_cC_a$ ja $A_cB_aC_b$ ümberringjoonte keskpunktid asuvad ühel sirgel.

Ülesanne 16 Olgu a, b, c, n positiivsed täisarvud, mille korral $abc = 10^n - 1$. Tähistagu $S(x)$ arvu x numbrite summat. Tõesta, et

$$S(a) + S(b^2) + S(c^4) \geqslant \sqrt[3]{243n}.$$

Ülesanne 17 Nimetame positiivset täisarvu *briljantseks*, kui tema kõik positiivsed jagajad saab jagada kaheks hulgaks, milles on võrdne arv elemente ning mille elementide summad on võrdsed.

Leia briljantse arvu positiivsete jagajate arvu kõik võimalikud väärtused.

Ülesanne 18 Leia kõik funktsioonid $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$, nii et $f(2) = 1$ ning

$$\text{VÜK}(f(a+b), f(b)) \mid \text{VÜK}(a + f(b), b)$$

kõigi positiivsete täisarvude a, b korral.

Ülesanne 19 Tahvlile on kirjutatud 100 positiivset täisarvu. Birgit mängib mängu. Igal käigul valib ta kaks tahvlilolevat arvu a ja b, nii et $a \mid b$, kustutab mõlemad ning kirjutab tahvlile arvu b/a. Ta teeb käike seni, kuni enam pole võimalik ühtegi käiku teha, ja siis mäng lõpeb.

Leia suurim N, mille korral mingi algseisu jaoks on Birgitil võimalik sõltuvalt käikude valikust lõpetada mäng nii sedasi, et alles on ainult üks arv, kui ka sedasi, et alles on N arvu.

Ülesanne 20 Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral leidub arvude $1, \ldots, n$ permutatsioon $a_1, \ldots, a_n$, nii et arvud $a_1, 2a_2, \ldots, na_n$ annavad arvuga n jagamisel n erinevat jääki.