Baltian tie

15. marraskuuta 2025, Riika, Latvia

Version: Finnish

Kilpailuaika: 4 tuntia ja 30 minuuttia
Ensimmäisten 30 minuutin aikana tehtävistä saa kysyä.
Ainoastaan kirjoitus- ja piirrustusvälineet ovat sallittuja.

Tehtävä 1 Onko olemassa sellainen kokonaislukujono $a_1, a_2, \ldots$, että jokaisella kokonaisluvulla $d \neq 0$ on olemassa täsmälleen 2025 eri indeksiparia (i, j), joille $a_i - a_j = d$?

Tehtävä 2 Olkoon $a_1, a_2, \ldots$ jono reaalilukuja, joille

$$\{a_n\}\lfloor a_{n+1}\rfloor = \lfloor a_n\rfloor\{a_{n+1}\}$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Osoita, että on olemassa sellainen $\lambda \in \mathbb{R}$, että $\{a_m\}\lfloor a_m\rfloor = \lambda$ äärettömän monella positiivisella kokonaisluvulla m.

Huomautus: Kun $x \in \mathbb{R}$, niin $\lfloor x\rfloor$ on suurin kokonaisluku, joka ei ole suurempi kuin x, ja $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$.

Tehtävä 3 Olkoon $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ kuvaus, jolle

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y),$$

kun $x, y \in \mathbb{Q}$. Osoita, että on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}$, jolle $f(x) \geq \alpha x$, kun $x \in \mathbb{Q}$.

Tehtävä 4 Etsi kaikki kuvaukset $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joille

$$\big(f(a-c) + f(b-d)\big)\big(f(a) + f(b)\big) = f(ad - bc) + f\big(f(a) + f(b) - ac - bd\big),$$

kun $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 5 Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja olkoot $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ positiivisia reaalilukuja, joille

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{x_1^2 + x_n^2}{2}.$$

Todista, että

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n x_1 x_n.$$

Tehtävä 6 Itämerellistä polttopalloa pelaa $n \geq 3$ kaveria. Alussa kaikki pelaajat ovat vapaina. Kun vapaa pelaaja A *polttaa* toisen vapaan pelaajan B, tällöin A *vangitsee* B:n ja *vapauttaa* kaikki sillä hetkellä B:n vangitsemana olevat pelaajat. Kaksi polttoa ei voi tapahtua samanaikaisesti.

Etsi pienin määrä polttoja, jonka jälkeen on mahdollista, että minkä tahansa kahden pelaajan joukosta vähintään toinen on vapauttanut toisen.

Tehtävä 7 Olkoon n parillinen positiivinen kokonaisluku. Tarkastellaan $n \times n \times n$-kuutiota, joka koostuu n^3 yksikkökuutiosta. Kutsutaan n yksikkökuutiosta koostuvaa $1 \times 1 \times n$-särmiötä *neulaksi*. Neula voi osoittaa kolmeen eri suuntaan. Etsi suurin kokonaisluku K, jolle voidaan löytää $3K$ neulaa, K jokaiseen suuntaan, joista mitkään kaksi eivät sisällä samaa yksikkökuutiota.

Tehtävä 8 Epänegatiivisten kokonaislukujen jonoa $a_1, \ldots, a_n$ kutsutaan *itseään kuvaavaksi*, jos

$$a_k = \big|\{i \mid a_i \geq k\}\big|$$

kaikilla $k \in \{1, \ldots, n\}$ eli a_k on niiden jonon jäsenten lukumäärä, jotka ovat suurempia tai yhtä suuria kuin k kaikilla $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Määritä jokaiselle positiiviselle kokonaisluvulle n niiden itseään kuvaavien jonojen lukumäärä, joiden pituus on n.

Tehtävä 9 *Itämerellinen monimantti* on n-kulmio, jonka sivujen pituudet ovat $n, n-1, \ldots, 2, 1$ tässä järjestyksessä ja jonka jokainen sisäkulma on $120°$ tai $240°$. Todista, että jokaisella itämerellisellä monimantilla n on jaollinen luvulla 6.

Tehtävä 10 Positiivinen 9-numeroinen kokonaisluku on *kiva*, jos se sisältää kaikki numerot yhdestä yhdeksään. Luku on *mahtava*, jos se on kiva ja jos jokaiselle $k = 1, \ldots, 9$ pätee, että luvun k:nnes numero on yhtä suuri kuin numeron k sijainti luvussa. Esimerkiksi 847296315 on mahtava:

- ensimmäinen numero on 8, mikä on numeron 1 sijainti luvussa,
- toinen numero on 4, mikä on numeron 2 sijainti luvussa,
- kolmas numero on 7, mikä on numeron 3 sijainti luvussa, ja niin edelleen.

Osoita, että mahtavien lukujen lukumäärä on parillinen.

Tehtävä 11 Olkoon $A_1, \ldots, A_n$ jono euklidisen tason pisteitä. Sama piste voi esiintyä jonossa useamman kerran, mutta jono sisältää vähintään kaksi eri pistettä. *Baltian tie* on reitti, jonka määrää pisteiden $A_1, \ldots, A_n$ permutaatio $B_1, \ldots, B_n$. Baltian tien pituus on

$$|B_1B_2| + |B_2B_3| + \cdots + |B_{n-1}B_n| + |B_nB_1|,$$

missä $|PQ|$ on pisteiden P ja Q euklidinen etäisyys.

Olkoot K ja L joidenkin Baltian teiden pituudet samassa n pisteen jonossa. Määritä annetulle luvulle n suurin mahdollinen arvo K/L, joka voidaan saavuttaa jollain jonolla $A_1, \ldots, A_n$.

Tehtävä 12 Teräväkulmaiselle kolmiolle ABC pätee $|AB| < |AC|$, sen sisäympyrän keskipiste on I ja ympärysympyrä on ω. Suora AI leikkaa sivun BC pisteessä D. Olkoon T sellainen piste ympyrällä ω, että $AT \parallel BC$. Suora TI leikkaa ympyrän ω uudelleen pisteessä P ja kolmion APD ympärysympyrän uudelleen pisteessä Q. Todista, että $|AI| = |DQ|$.

Tehtävä 13 Jännenelikulmiossa $ABCD$ suorat AB ja CD leikkaavat pisteessä E. Piste P sijaitsee nelikulmion $ABCD$ sisällä ja toteuttaa ehdon

$$\measuredangle BAP = \measuredangle PCB \quad \text{ja} \quad \measuredangle CBP = \measuredangle PDC.$$

Todista, että $PE \perp BC$.

Tehtävä 14 Teräväkulmaiselle kolmiolle ABC pätee $AB < AC$, sen ympärysympyrä on ω ja ortokeskus on H. Ympyrän ω pidemmällä kaarella BC sijaitsee piste P, jolle $\measuredangle PCB + \measuredangle ACB = 90°$. Janan AC piste R toteuttaa ehdon $|BR| = |CR|$. Todista, että $\measuredangle HPR = \measuredangle ACB$.

Tehtävä 15 Teräväkulmaisessa kolmiossa ABC, jonka sivut ovat keskenään eri pituisia, janan BC keskinormaali leikkaa suora AC pisteessä A_b ja suoran AB pisteessä A_c. Pisteet B_c, B_a, C_a ja C_b määritellään samankaltaisesti. Todista, että kolmioiden ABC, $A_bB_cC_a$ ja $A_cB_aC_b$ ympärysympyröiden keskipisteet ovat keskenään samalla suoralla.

Tehtävä 16 Olkoot a, b, c ja n positiivisia kokonaislukuja, joille $abc = 10^n - 1$. Kun $S(x)$ merkitsee numeroiden summaa luvun x kymmenjärjestelmäesityksessä, todista, että

$$S(a) + S(b^2) + S(c^4) \geq \sqrt[3]{243n}.$$

Tehtävä 17 Kutsuttakoon positiivista kokonaislukua *loistavaksi*, jos sen kaikki positiiviset tekijät voidaan osittaa kahdeksi joukoksi niin, että kummassakin on yhtä monta alkiota ja sama alkioiden summa.

Etsi kaikki positiiviset kokonaisluvut, jotka ovat jonkin loistavan luvun kaikkien positiivisten tekijöiden lukumääriä.

Tehtävä 18 Etsi kaikki sellaiset kuvaukset $f\colon \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+$, että $f(2) = 1$ ja

$$\operatorname{pyj}(f(a+b), f(b)) \mid \operatorname{pyj}(a + f(b), b)$$

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla a ja b.

Tehtävä 19 Liitutaululle on kirjoitettuna 100 positiivista kokonaislukua. Kaisa pelaa peliä. Yhden siirron aikana hän valitsee ensin kaksi tauluilla olevista luvuista, a ja b, joille $a \mid b$, pyyhkii molemmat taululta, ja kirjoittaa taululle luvun b/a. Hän jatkaa siirtoja, kunnes jäljellä ei ole enää sallittuja siirtoja, jolloin peli loppuu.

Etsi suurin sellainen N, että jostakin aloitustilanteesta Kaisa voi

- sekä pelata pelin lopputilanteeseen, jossa on vain yksi luku taululla,
- että pelata pelin lopputilanteeseen, jossa on N lukua taululla.

Tehtävä 20 Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n, joille on olemassa lukujen $1, \ldots, n$ permutaatio $a_1, \ldots, a_n$, jossa luvuilla $a_1, 2a_2, \ldots, na_n$ on kaikilla eri jäännösluokat modulo n.