Baltic Way

15. November 2025, Riga, Lettland — Version: German

Arbeitszeit: 4 Stunden und 30 Minuten
Während der ersten 30 Minuten können Anfragen an die Jury gestellt werden.
Schreib- und Zeichengeräte sind die einzigen erlaubten Hilfsmittel.

Aufgabe 1 Gibt es eine Folge $a_1, a_2, \ldots$ ganzer Zahlen, sodass es für jede ganze Zahl $d \neq 0$ genau 2025 verschiedene Paare (i, j) von Indizes gibt, für die $a_i - a_j = d$ gilt?

Aufgabe 2 Sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen, für die

$$\{a_n\}\lfloor a_{n+1}\rfloor = \lfloor a_n\rfloor\{a_{n+1}\}$$

für jede positive ganze Zahl n gilt. Beweise, dass es eine reelle Zahl λ gibt, sodass die Gleichung $\{a_m\}\lfloor a_m\rfloor = \lambda$ für unendlich viele positive ganze Zahlen m gilt.

Hinweis: Für eine reelle Zahl x bezeichnet $\lfloor x\rfloor$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist, und $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$.

Aufgabe 3 Sei $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ eine Funktion, die

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ erfüllt. Zeige, dass es eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die Ungleichung $f(x) \geq \alpha x$ für alle rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$ gilt.

Aufgabe 4 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$(f(a-c) + f(b-d))\,(f(a) + f(b)) = f(ad - bc) + f\,(f(a) + f(b) - ac - bd)$$

für alle reellen Zahl $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 5 Sei n eine positive ganze Zahl und seien $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ positive reelle Zahlen mit

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{x_1^2 + x_n^2}{2}.$$

Beweise die Ungleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n x_1 x_n.$$

Aufgabe 6 Es spielen $n \geq 3$ Freunde Zombieball. Zu Beginn sind alle Spieler frei. Wenn ein freier Spieler A einen anderen freien Spieler B *abwirft*, nimmt A den Spieler B gefangen und befreit alle Spieler, die in dem Moment von B gefangen gehalten werden. Zwei Abwürfe können nicht gleichzeitig geschehen.

Finde die kleinste mögliche Zahl k, sodass Folgendes gilt: Nach k Abwürfen ist es möglich, dass von jeweils zwei Spielern mindestens einer von beiden den anderen schon einmal befreit hat.

Aufgabe 7 Sei n eine gerade positive ganze Zahl. Gegeben ist ein $n \times n \times n$-Würfel, der aus n^3 Einheitswürfeln besteht. Eine Menge von n dieser Einheitswürfel heiße *Nadel*, falls sie einen Quader der Maße $1 \times 1 \times n$ bildet. Eine Nadel hat also eine der drei möglichen Orientierungen. Finde die größte ganze Zahl K, sodass es möglich ist, $3K$ Nadeln auszuwählen, K von jeder Orientierung, sodass keine zwei Nadeln einen Einheitswürfel gemeinsam haben.

Aufgabe 8 Eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ heiße *selbstbeschreibend*, falls

$$a_k = |\{i \mid a_i \geq k\}|$$

für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, d. h. für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ entspricht der Wert von a_k der Anzahl von Folgengliedern, die nicht kleiner als k sind.

Bestimme für jede positive ganze Zahl n die Anzahl selbstbeschreibender Folgen mit n Gliedern.

Aufgabe 9 Ein *baltischer Polyiamant* ist ein n-Eck mit den Seitenlängen $n, n-1, \ldots, 2, 1$ in genau dieser Reihenfolge, bei dem alle Innenwinkel 120° oder 240° groß sind. Beweise, dass bei einem baltischen Polyiamanten n stets durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 10 Eine positive ganze Zahl mit 9 Ziffern heiße *nett*, falls sie jede Ziffer von 1 bis 9 enthält. Eine Zahl heiße *wunderbar*, falls sie nett ist und für jedes $k \in \{1, \ldots, 9\}$ gilt: Die k-te Ziffer der Zahl entspricht der Position von k in der Zahl. Zum Beispiel ist die Zahl 847 296 315 wunderbar:

- Die erste Ziffer ist die 8 und die 1 steht an der achten Position.
- Die zweite Ziffer ist die 4 und die 2 steht an der vierten Position.
- Die dritte Ziffer ist die 7 und die 3 steht an der siebten Position, usw.

Zeige, dass die Anzahl wunderbarer Zahlen gerade ist.

Aufgabe 11 Es sei $A_1, \ldots, A_n$ eine Folge von Punkten in der euklidischen Ebene. Einige Punkte dürfen zusammenfallen, aber die Folge bestehe aus mindestens zwei verschiedenen Punkten. Ein *Baltic Way* sei eine Route, die durch eine Permutation $B_1, \ldots, B_n$ der Punkte $A_1, \ldots, A_n$ definiert ist. Die Länge eines Baltic Ways sei

$$|B_1B_2| + |B_2B_3| + \cdots + |B_{n-1}B_n| + |B_nB_1|,$$

wobei $|PQ|$ die euklidische Distanz zwischen den Punkten P und Q bezeichnet.

Seien K und L die Längen von zwei Baltic Ways der gleichen Folge von n Punkten. Bestimme für ein gegebenes n den maximal möglichen Wert von K/L unter allen möglichen Folgen $A_1, \ldots, A_n$.

Aufgabe 12 In einem spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit $|AB| < |AC|$ sei I der Inkreismittelpunkt und ω der Umkreis. Die Gerade AI schneide die Seite $\overline{BC}$ in D. Sei T derjenige Punkt auf ω, für den $AT \parallel BC$ gilt. Die Gerade TI schneide ω erneut in P und den Umkreis von $\triangle APD$ erneut in Q. Beweise: $|AI| = |DQ|$.

Aufgabe 13 Im Sehnenviereck $\square ABCD$ schneiden sich die Geraden AB und CD in E. Ein Punkt P liege im Inneren von $\square ABCD$ und erfülle

$$\measuredangle BAP = \measuredangle PCB \quad \text{und} \quad \measuredangle CBP = \measuredangle PDC.$$

Beweise: $PE \perp BC$.

Aufgabe 14 Ein spitzwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit $|AB| < |AC|$ habe den Umkreis ω und den Höhenschnittpunkt H. Der Punkt P liege auf dem längeren der beiden Kreisbögen von ω zwischen B und C und erfülle $\measuredangle PCB + \measuredangle ACB = 90°$. Der Punkt R liege auf der Strecke $\overline{AC}$ und es gelte $|BR| = |CR|$. Beweise $\measuredangle HPR = \measuredangle ACB$.

Aufgabe 15 Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck mit paarweise verschiedenen Seitenlängen. Die Mittelsenkrechte von BC schneide die Geraden AC und AB in den Punkten A_b bzw. A_c. Die Punkte B_c, B_a, C_a und C_b seien entsprechend definiert. Beweise, dass die Umkreismittelpunkte der Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle A_bB_cC_a$ und $\triangle A_cB_aC_b$ kollinear sind.

Aufgabe 16 Seien a, b, c, n positive ganze Zahlen mit $abc = 10^n - 1$. Mit $S(x)$ bezeichnen wir die Quersumme einer Zahl x im Dezimalsystem. Beweise die Ungleichung

$$S(a) + S(b^2) + S(c^4) \geq \sqrt[3]{243n}.$$

Aufgabe 17 Eine positive ganze Zahl heiße *brillant*, falls sich ihre positiven Teiler in zwei Mengen gleicher Mächtigkeit partitionieren lassen, sodass die Summe der Elemente in der einen Menge mit der Summe der Elemente in der anderen Menge übereinstimmt.

Finde alle möglichen Werte für die Anzahl der positiven Teiler einer brillanten Zahl.

Aufgabe 18 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ mit $f(2) = 1$, sodass

$$\mathrm{kgV}(f(a+b), f(b)) \mid \mathrm{kgV}(a + f(b), b)$$

für alle positiven ganzen Zahlen a, b gilt.

Aufgabe 19 Auf einer Tafel stehen 100 positive ganze Zahlen. Die Mathematigerin spielt ein Spiel. Ein Zug besteht darin, auf der Tafel zwei ganze Zahlen a und b mit der Eigenschaft $a \mid b$ auszusuchen, diese abzuwischen und stattdessen die ganze Zahl b/a auf die Tafel zu schreiben. Die Mathematigerin macht solange Züge, bis keine Züge mehr möglich sind; an diesem Punkt ist das Spiel beendet.

Finde die größte Zahl N, für die es einen Anfangszustand gibt, von dem aus die Mathematigerin beides kann:

- das Spiel mit genau einer Zahl auf der Tafel beenden, und
- das Spiel mit genau N Zahlen auf der Tafel beenden.

Aufgabe 20 Ermittle alle positiven ganzen Zahlen n, sodass eine Permutation $a_1, \ldots, a_n$ der Zahlen $1, \ldots, n$ existiert, für die die Zahlen $a_1, 2a_2, \ldots, na_n$ paarweise verschieden modulo n sind.