Baltijas ceļš

15. novembris 2025, Rīga, Latvija

Version: Latvian

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Drīkst izmantot tikai rakstāmpiederumus un cirkuli.

1. uzdevums Vai eksistē veselu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$ tāda, ka katram veselam skaitlim $d \neq 0$ ir tieši 2025 dažādi indeksu pāri (i, j), kuriem $a_i - a_j = d$?

2. uzdevums Dota reālu skaitļu virkne $a_1, a_2, \ldots$, kurai

$$\{a_n\}\lfloor a_{n+1}\rfloor = \lfloor a_n\rfloor\{a_{n+1}\}$$

visiem naturāliem skaitļiem n. Pierādīt, ka eksistē tāds skaitlis $\lambda \in \mathbb{R}$, ka $\{a_m\}\lfloor a_m\rfloor = \lambda$ izpildās bezgalīgam m vērtību skaitam.

Piezīme: Reālam skaitlim x, ar $\lfloor x\rfloor$ apzīmē lielāko veselu skaitli, kas nepārsniedz x, un $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$.

3. uzdevums Dota funkcija $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, kurai izpildās nevienādība

$$f(x) + f(y) \geqslant f(x + y)$$

visiem $x, y \in \mathbb{Q}$. Pierādīt, ka eksistē tāds skaitlis $\alpha \in \mathbb{R}$, ka $f(x) \geqslant \alpha x$ visiem $x \in \mathbb{Q}$.

Piezīme: Ar $\mathbb{Q}$ apzīmē visu racionālo skaitļu kopu.

4. uzdevums Atrast visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām

$$(f(a-c) + f(b-d))\,(f(a) + f(b)) = f(ad - bc) + f\left(f(a) + f(b) - ac - bd\right)$$

visiem reāliem skaitļiem a, b, c, d.

5. uzdevums Dots naturāls skaitlis n un pozitīvi reāli skaitļi $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ ar īpašību, ka

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{x_1^2 + x_n^2}{2}.$$

Pierādīt, ka

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant n x_1 x_n.$$

6. uzdevums Draugu kompānija, kas sastāv no $n \geq 3$ cilvēkiem, spēlē ķerenes variāciju. Spēles sakumā visi spēlētāji ir brīvi. Kad brīvs spēlētājs A noķer spēlētāju B, viņš iesaldē spēlētāju B un atbrīvo visus spēlētājus, kurus ir iesaldējis B. Divas noķeršanas nevar notikt vienlaikus. Atrast mazāko iespējamo ķērienu skaitu, pēc kura starp jebkuriem 2 spēlētājiem viens noteikti būs atbrīvojis otru.

7. uzdevums Dots pāra naturāls skaitlis n. Kubs ar izmēriem $n \times n \times n$ sastāv no n^3 vienības kubiem. Kopu, kas sastāv no n vienības kubiem un veido $1 \times 1 \times n$ kastīti sauksim par *adatu*, un tai ir 3 iespējamās orientācijas. Atrast lielāko naturālu skaitli K tādu, ka ir iespējams izvēlēties $3K$ adatas, K — katrā orientācijā, tā, ka nekādām 2 no tām nav kopīgā vienības kuba.

8. uzdevums Nenegatīvu veselu skaitļu virkni $a_1, \ldots, a_n$ sauksim par *pašraksturojošu,* ja

$$a_k = |\{i \mid a_i \geqslant k\}|$$

visiem $k \in \{1, \ldots, n\}$, t.i., a_k ir vienāds ar virknes locekļu, kuri ir lielāki vai vienādi ar k, skaitu visiem $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Katram naturālam skaitlim n noteikt pašraksturojošu virkņu skaitu ar garumu n.

9. uzdevums Par *Baltijas poliamondu* sauksim $n-$stūri, kura malas garumi ir $n, n-1, \ldots, 2, 1$ tieši šādā secībā un visi iekšējo leņķu lielumi ir 120° vai 240°. Pierādīt, ka jebkuram Baltijas poliamondam n dalās ar 6.

10. uzdevums Sauksim deviņciparu naturālu skaitli par *labu*, ja tā decimālais pieraksts satur visus ciparus no 1 līdz 9. Sauksim skaitli par *lielisku*, ja tas ir labs un katram $k = 1, \ldots, 9$ $k-$tais cipars šī skaitļa decimālajā pierakstā ir vienāds ar cipara k pozīcijas numuru skaitļa decimālajā pierakstā. Piemēram, skaitlis 847296315 ir lielisks, jo:

- pirmais cipars šajā skaitlī ir 8, kas ir vieninieka pozīcija šajā skaitļa decimālajā pierakstā,
- otrais cipars šajā skaitlī ir 4, kas ir divnieka pozīcija šajā skaitļa decimālajā pierakstā,
- trešais cipars šajā skaitlī ir 7, kas ir trijnieka pozīcija šajā skaitļa decimālajā pierakstā utt.

Pierādīt, ka lielisko skaitļu skaits ir pāra.

11. uzdevums Dota punktu kopa $A_1, \ldots, A_n$ Eiklīda plaknē. Daži no punktiem var sakrist, taču dotajā kopā ir vismaz 2 atšķirīgi punkti. Par *Baltijas ceļu* sauksim maršrutu caur punktu $A_1, \ldots, A_n$ permutāciju $B_1, \ldots, B_n$, un Baltijas ceļa garums ir

$$|B_1B_2| + |B_2B_3| + \cdots + |B_{n-1}B_n| + |B_nB_1|,$$

kur ar $|PQ|$ apzīmē nogriežņa PQ garumu.

Ar K un L apzīmēsim divu Baltijas ceļu garumus kādai n punktu kopai. Katram naturālam skaitlim n atrast izteiksmes K/L lielāko iespējamo vērtību visu iespējamo n punktu kopu starpā.

12. uzdevums Dots šaurleņķu trijstūris ABC, kuram $AB < AC$, un kura ievilktās riņķa līnijas centrs ir I un kura apvilktā riņķa līnija ir ω. Taisne AI krusto malu BC punktā D. Punkts T ir izvēlēts uz ω tā, ka $AT \parallel BC$. Taisne TI atkārtoti krusto ω punktā P un atkārtoti krusto ap trijstūri APD apvilkto riņķa līniju punktā Q. Pierādīt, ka $AI = DQ$.

13. uzdevums Dots ievilkts četrstūris $ABCD$, kura malu AB un CD pagarinājumi krustojās punktā E. Punkts P izvēlēts $ABCD$ iekšpusē tā, ka

$$\angle BAP = \angle PCB \quad \text{un} \quad \angle CBP = \angle PDC.$$

Pierādīt, ka $PE \perp BC$.

14. uzdevums Dots šaurleņķu trijstūris ABC ar $AB < AC$, kura apvilkta riņķa līnija un ortocentrs ir attiecīgi ω un H. Punkts P atrodas uz loka $\widehat{BAC}$, ar īpašību, ka $\angle PCB + \angle ACB = 90^\circ$. Punkts R ir atlikts uz taisnes AC tā, ka $BR = CR$. Pierādīt, ka $\angle HPR = \angle ACB$.

15. uzdevums Dots dažādmalu šaurleņķu trijstūris ABC. Malas BC vidusperpendikuls krusto taisnes AC un AB attiecīgi punktos A_b un A_c. Analoģiski definēsim punktus B_c, B_a, C_a un C_b. Pierādīt, ka trijstūru $ABC, A_bB_cC_a$, un $A_cB_aC_b$ apvilkto riņķa līniju centri atrodas uz vienas taisnes.

16. uzdevums Doti naturāli skaitļi a, b, c, n ar īpašību, ka $abc = 10^n - 1$. Ar $S(x)$ apzīmēsim skaitļa x decimāla pieraksta ciparu summu. Pierādīt, ka

$$S(a) + S(b^2) + S(c^4) \geqslant \sqrt[3]{243n}.$$

17. uzdevums Naturālu skaitli sauksim par *brīnumainu*, ja tā dalītājus var sadalīt divās kopās ar vienādu elementu skaitu un elementu kopējo summu.

Atrast visas iespējamās vērtības brīnumaina skaitļa pozitīvo dalītāju skaitam.

18. uzdevums Atrast visas funkcijas $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kurām $f(2) = 1$ un

$$\mathrm{MKD}(f(a+b), f(b)) \mid \mathrm{MKD}(a + f(b), b)$$

visiem naturāliem skaitļiem a, b.

Piezīme: Ar $\mathrm{MKD}(x, y)$ apzīmē skaitļu x, y mazāko kopīgo dalāmo. Piemēram, $\mathrm{MKD}(15, 21) = 105$.

19. uzdevums Sākumā uz tāfeles ir uzrakstīti 100 naturāli skaitļi. Anna spēlē spēli. Vienā gājienā Anna izvēlas 2 uz tāfeles uzrakstītus naturālus skaitļus a un b ar īpašību, ka $a \mid b$, nodzēš tos un to vietā uzraksta skaitli b/a. Viņa veic gājienus, līdz tas nav iespējams, un tad spēle beidzas.

Atrast lielāko naturālo skaitli N tādu, ka eksistē tāds spēles sākuma stāvoklis, ka Anna var:

- gan pabeigt spēli ar tikai vienu atlikušu skaitli,
- gan pabeigt spēli ar N atlikušiem skaitļiem.

20. uzdevums Atrast visus naturālus skaitļus n, kuriem eksistē skaitļu $1, \ldots, n$ permutācija $a_1, \ldots, a_n$ ar īpašību, ka skaitļu $a_1, 2a_2, \ldots, na_n$ atlikumi pēc moduļa n ir savstarpēji dažādi.