Baltic Way

15 November 2025, Riga, Latvia

Version: Norwegian

Tid til rådighet: 4 timer og 30 minutter.
Spørsmål kan kun stilles de første 30 minuttene.
Det er kun tillatt å bruke skrive- og tegneredskaper.

Oppgave 1 Finnes det en følge $a_1, a_2, \ldots$ av heltall, slik at for hvert heltall $d \neq 0$, finnes det nøyaktig 2025 distinkte par at indekser (i, j), slik at $a_i - a_j = d$?

Oppgave 2 La $a_1, a_2, \ldots$ være en følge av reelle tall slik at

$$\{a_n\}\lfloor a_{n+1}\rfloor = \lfloor a_n\rfloor\{a_{n+1}\}$$

for hvert positive heltall n. Vis at det eksisterer et reellt tall λ slik at $\{a_m\}\lfloor a_m\rfloor = \lambda$ for uendelig mange positive heltall m.

Bemerkning: For et reellt tall x, er $\lfloor x\rfloor$ det største heltallet mindre enn eller lik x, og $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$.

Oppgave 3 La $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ være en funksjon som tilfredsstiller

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y)$$

for alle $x, y \in \mathbb{Q}$. Vis at det finnes en $\alpha \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) \geq \alpha x$ for alle $x \in \mathbb{Q}$.

Oppgave 4 Finn alle funksjoner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at

$$(f(a-c) + f(b-d))\,(f(a) + f(b)) = f(ad - bc) + f\,(f(a) + f(b) - ac - bd)$$

for alle reelle tall a, b, c, d.

Oppgave 5 La n være et positivt heltall og la $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ være positive reelle tall som tilfredsstiller

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{x_1^2 + x_n^2}{2}.$$

Vis at

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n x_1 x_n.$$

Oppgave 6 På *Abelkonkurransen videregående skole for ressurssvake elever* spiller $n \geq 3$ småbarn stikkball. I starten er alle småbarna frie. Når et fritt småbarn A *slår ut* et annet fritt småbarn B, skjer det følgende. For det første går B ut av spillet og blir fengslet av A, og i tillegg *frigjør* A alle småbarna som i det øyeblikket var fengslet av B, og disse frigjorte småbarna kommer tilbake i spillet. To utslagninger kan ikke skje samtidig.

Finn det minste antall utslagninger som skal til for at blant alle utvalg av to småbarn, vil en av de ha frigjort den andre minst en gang tidligere i spillet.

Oppgave 7 La n være et positivt partall. En $n \times n \times n$ kube består av n^3 enhetskuber. En *spisepinne* er en mengde av enhetskuber som danner et rettvinklet rektangulært prisme av størrelse $1 \times 1 \times n$. Merk at en spisepinne kan ha tre orienteringer. Finn det største heltallet K, slik at det er mulig å velge $3K$ spisepinner, K av hver orientering, slik at ingen par av spisepinner går igjennom samme enhetskube.

Oppgave 8 En endelig følge av ikkenegative heltall $a_1, \ldots, a_n$ kalles *selvåpenbarende* dersom

$$a_k = |\{i \mid a_i \geq k\}|$$

for alle $k \in \{1, \ldots, n\}$. Med andre ord er a_k lik antall elementer i følgen som er større enn eller lik k.

For hvert positive heltall n, bestem antall selvåpenbarende følger av lengde n.

Oppgave 9 En *Batlisk polyiamond* er en n-kant med sidelengder $n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1$ i nøyaktig denne rekkefølgen, der alle indre vinkler er $120°$ eller $240°$ grader. Vis at for alle batliske polyiamonder, så er n delelig med 6.

Oppgave 10 Et positivt heltall med nøyaktig 9 sifre kalles *mangfoldig* dersom det inneholder hvert siffer fra 1 til 9. Et tall kalles *supermangfoldig* dersom det er mangfoldig, og for hver $k = 1, 2, \ldots, 9$ er det k-te sifferet lik plasseringen til sifferet k i tallet. For eksempel er 847296315 supermangfoldig:

- Det første sifferet er 8, som er posisjonen til 1 i tallet.
- Det andre sifferet er 4, som er posisjon 2 i tallet.
- Det tredje sifferet er 7, som er posisjon 3 i tallet, også videre.

Vis at antallet supermangfoldig tall er et partall.

Oppgave 11 La $A_1, \ldots, A_n$ være en følge av punkter i planet. Noen av punktene kan være like, men det er minst to distinkte punkter blant dem. En *batlisk vei* er en sti definert av en permutasjon $B_1, \ldots, B_n$ av punktene $A_1, \ldots, A_n$. Lengden på en batlisk vei er

$$|B_1B_2| + |B_2B_3| + \cdots + |B_{n-1}B_n| + |B_nB_1|,$$

der $|PQ|$ er avstanden mellom punktene P og Q.

La K og L være lengdene av to batliske veier på den samme mengden av n punkter. For en gitt n, bestem den maksimale verdien K/L kan ta over alle mulige følger av punkter $A_1, \ldots, A_n$.

Oppgave 12 I en spissvinklet trekant ABC med $AB < AC$ er I innsenteret og ω omsirkelen. Linjene AI og BC skjærer i D, og T er punktet på ω slik at $AT \parallel BC$. Linjen TI skjærer ω igjen i P og omsirkelen til APD igjen i Q. Vis at $AI = DQ$.

Oppgave 13 La $ABCD$ være en syklisk firkant og la AB og CD skjære i E. Et punkt P ligger på innsiden av $ABCD$ og oppfyller

$$\angle BAP = \angle PCB \quad \text{and} \quad \angle CBP = \angle PDC.$$

Vis at $PE \perp BC$.

Oppgave 14 I en spissvinklet trekant ABC med $AB < AC$ er ω omsirkelen og H ortosenteret. Punktet P ligger på buen BC av ω som inneholder A og tilfredsstiller $\angle PCB + \angle ACB = 90°$. Punktet R ligger på linjestykket AC og tilfredsstiller $BR = CR$. Vis at $\angle HPR = \angle ACB$.

Oppgave 15 La ABC være en spissvinklet trekant slik at alle sidekantene har parvis ulik lengde. Midtnormalen til BC skjærer AC og AB i henholdsvis A_b og A_c, og punktene B_c, B_a, C_a og C_b er definert symmetrisk. Vis at omsenterene til ABC, $A_bB_cC_a$ og $A_cB_aC_b$ ligger på linje.

Oppgave 16 La a, b, c, n være positive heltall slik at $abc = 10^n - 1$. Hvis $S(x)$ betegner tverrsummen til x, vis at

$$S(a) + S(b^2) + S(c^4) \geq \sqrt[3]{243n}.$$

Oppgave 17 Vi sier at et positivt heltall er *glimrende* hvis de positive divisorene til tallet kan partisjoneres i to mengder med lik sum og like mange elementer.

Finn alle mulige verdier av antall positive divisorer til et glimrende tall.

Oppgave 18 Finn alle funksjoner $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ slik at $f(2) = 1$ og

$$\operatorname{lcm}(f(a+b), f(b)) \mid \operatorname{lcm}(a + f(b), b)$$

for alle positive heltall a, b.

Oppgave 19 På en tavle står det 100 positive heltall. Sophus spiller et spill. Et trekk består av å først velge to heltall a og b som står på tavla og oppfyller $a \mid b$, deretter fjerne begge tallene og til slutt skrive opp heltallet b/a på tavla. Han gjør trekk helt til det ikke er flere gyldige trekk, og da er spillet ferdig.

Finn det største tallet N slik at det finnes en startkonfigurasjon som er slik at Sophus både kan

- fullføre spillet med ett tall igjen på tavla, og
- fullføre spillet med N tall igjen på tavla.

Oppgave 20 Bestem alle positive heltall n slik at det finnes en permutasjon $a_1, \ldots, a_n$ av $1, \ldots, n$, som er slik at tallene $a_1, 2a_2, \ldots, na_n$ er parvis distinke modulo n.