Bałtycki Szlak

15 listopada 2025 r., Ryga, Łotwa

Version: Polish

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut
Pytania można zadawać w ciągu początkowych 30 minut.
Dopuszczalne jest posiadanie jedynie przyborów do pisania i rysowania.

Zadanie 1 Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots$ taki, że dla dowolnej liczby całkowitej $d \neq 0$ istnieje dokładnie 2025 różnych par indeksów (i, j), dla których $a_i - a_j = d$.

Zadanie 2 Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots$ spełniający

$$\{a_n\}\lfloor a_{n+1}\rfloor = \lfloor a_n\rfloor\{a_{n+1}\}$$

dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n. Udowodnić, że istnieje taka liczba rzeczywista λ, że $\{a_m\}\lfloor a_m\rfloor = \lambda$ dla nieskończenie wielu liczb całkowitych dodatnich m.

Uwaga: $\lfloor x\rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x, a $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$.

Zadanie 3 Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniająca nierówność

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y)$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$. Wykazać, że istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że nierówność $f(x) \geq \alpha x$ zachodzi dla dowolnego $x \in \mathbb{Q}$.

Zadanie 4 Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$(f(a-c) + f(b-d))\,(f(a) + f(b)) = f(ad - bc) + f\,(f(a) + f(b) - ac - bd)$$

dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Zadanie 5 Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz liczby rzeczywiste dodatnie $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ spełniające równość

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{x_1^2 + x_n^2}{2}.$$

Udowodnić, że

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n x_1 x_n.$$

Zadanie 6 Na wybrzeżu Morza Bałtyckiego żyje $n \geq 3$ dzikich plemion. Początkowo każde z nich jest wolne. Wolne plemię A może napaść na wolne plemię B i je zniewolić, jednocześnie uwalniając wszystkie plemiona zniewolone w danej chwili przez B. Żadne dwie napaści nie odbywają się w tym samym czasie.

Znaleźć najmniejszą liczbę napaści po których możliwym jest, by dla dowolnej pary plemion przynajmniej jedno z nich kiedykolwiek uwolniło drugie.

Zadanie 7 Dana jest dodatnia liczba parzysta n. Kostka $n \times n \times n$ składa się z n^3 sześcianów jednostkowych. Zbiór n sześcianów jednostkowych tworzących prostopadłościan $1 \times 1 \times n$ nazwiemy *igłą* (taki zbiór można stworzyć w trzech różnych orientacjach). Znaleźć największą liczbę całkowitą K taką, że można wybrać $3K$ igieł zawierających się w kostce, po K w każdej orientacji, w taki sposób, że żadne dwie z nich nie współdzielą ze sobą sześcianu jednostkowego.

Zadanie 8 Ciąg nieujemnych liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_n$ nazwiemy *zawiłym*, jeśli

$$a_k = |\{i \mid a_i \geq k\}|$$

dla dowolnego $k \in \{1, \ldots, n\}$, to jest a_k jest równe liczbie wyrazów tego ciągu, które są większe lub równe k (dla dowolnego $k \in \{1, \ldots, n\}$).

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć liczbę ciągów zawiłych długości n.

Zadanie 9 *Bałtycki polyiamond* to n-kąt o bokach długości $n, n-1, \ldots, 2, 1$ (dokładnie w tej kolejności) i wszystkich kątach wewnętrznych równych $120°$ lub $240°$. Wykazać, że dla dowolnego bałtyckiego polyiamondu n jest podzielne przez 6.

Zadanie 10 Dziewięciocyfrową liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *przyjemną*, jeśli zawiera w swoim zapisie dziesiętnym każdą cyfrę od 1 do 9. Liczbę nazwiemy *cudowną*, jeśli jest przyjemna i dla każdego $k = 1, \ldots, 9$ jej k-ta cyfra jest równa pozycji cyfry k w tej liczbie. Na przykład liczba 847296315 jest cudowna:

- pierwsza jej cyfra to 8, co jest także pozycją cyfry 1 w tej liczbie,
- druga jej cyfra to 4, co jest także pozycją cyfry 2 w tej liczbie,
- trzecia jej cyfra to 7, co jest także pozycją cyfry 3 w tej liczbie, i tak dalej.

Udowodnić, że liczb cudownych jest parzyście wiele.

Zadanie 11 Niech $A_1, \ldots, A_n$ będzie ciągiem punktów na płaszczyźnie euklidesowej. Niektóre z tych punktów mogą się pokrywać, jednakże ciąg zawiera co najmniej dwa różne punkty. *Bałtycki Szlak* jest trasą zdefiniowaną przez permutację $B_1, \ldots, B_n$ punktów $A_1, \ldots, A_n$. Długość Bałtyckiego Szlaku to

$$|B_1B_2| + |B_2B_3| + \cdots + |B_{n-1}B_n| + |B_nB_1|,$$

gdzie $|PQ|$ oznacza odległość euklidesową pomiędzy punktami P i Q.

Niech K i L to długości pewnych dwóch Bałtyckich Szlaków zdefiniowanych na tym samym ciągu n punktów. Dla danego n, wyznaczyć maksymalną możliwą wartość wyrażenia K/L wśród wszystkich możliwych ciągów $A_1, \ldots, A_n$.

Zadanie 12 Dany jest ostrokątny trójkąt ABC spełniający $AB < AC$. Punkt I to środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a ω to okrąg opisany na trójkącie ABC. Prosta AI przecina bok BC w punkcie D. Niech T to punkt na okręgu ω taki, że $AT \parallel BC$. Prosta TI przecina okrąg ω ponownie w punkcie P oraz okrąg opisany na trójkącie APD ponownie w punkcie Q. Udowodnić, że $AI = DQ$.

Zadanie 13 Dany jest czworokąt $ABCD$, który można wpisać w okrąg, przy czym proste AB i CD nie są równoległe. Punkt E to punkt przecięcia się prostych AB i CD. Punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$ i spełnia

$$\angle BAP = \angle PCB, \ \angle CBP = \angle PDC.$$

Udowodnić, że $PE \perp BC$.

Zadanie 14 Dany jest ostrokątny trójkąt ABC, dla którego $AB < AC$. Niech ω to okrąg opisany na trójkącie ABC oraz niech H to ortocentrum tego trójkąta. Punkt P leży na większym łuku BC okręgu ω i spełnia $\angle PCB + \angle ACB = 90°$. Ponadto punkt R leży na odcinku AC i spełnia $BR = CR$. Udowodnić, że $\angle HPR = \angle ACB$.

Zadanie 15 Dany jest ostrokątny, różnoboczny trójkąt ABC. Symetralna BC przecina proste AC i AB w punktach A_b i A_c, odpowiednio. Zdefiniujmy punkty B_c, B_a, C_a i C_b analogicznie. Udowodnić, że środki okręgów opisanych na trójkątach ABC, $A_bB_cC_a$ i $A_cB_aC_b$ są współliniowe.

Zadanie 16 Dane są liczby całkowite dodatnie a, b, c, n spełniające $abc = 10^n - 1$. Niech $S(x)$ oznacza sumę cyfr liczby x w zapisie dziesiętnym. Udowodnić, że

$$S(a) + S(b^2) + S(c^4) \geq \sqrt[3]{243n}.$$

Zadanie 17 Liczba całkowita dodatnia jest nazywana *szprytną* jeśli jej dodatnie dzielniki można rozdzielić na dwa rozłączne, równoliczne podzbiory o równej sumie.

Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie, które są równe liczbie dodatnich dzielników pewnej szprytnej liczby.

Zadanie 18 Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ spełniające $f(2) = 1$ oraz

$$\mathrm{NWW}(f(a+b), f(b)) \mid \mathrm{NWW}(a + f(b), b)$$

dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Zadanie 19 Na tablicy napisano 100 liczb całkowitych dodatnich. Mariusz Sofusz gra w grę. Pojedynczy ruch polega na wybraniu z tablicy dwóch liczb a, b spełniających $a \mid b$, zmazaniu ich i napisaniu na tablicy liczby b/a. Wykonuje on ruchy dopóki istnieje jakiś dozwolony ruch, po czym gra się kończy.

Wyznaczyć największe N takie, że dla pewnego stanu początkowego Mariusz Sofusz może zarówno:

- zakończyć grę z jedną liczbą pozostałą na tablicy, jak i
- zakończyć grę z N liczbami pozostałymi na tablicy.

Zadanie 20 Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n takie, że istnieje permutacja $a_1, \ldots, a_n$ liczb $1, \ldots, n$ dla której liczby $a_1, 2a_2, \ldots, na_n$ dają parami różne reszty z dzielenia przez n.