Baltic Way

15 november 2025, Riga, Lettland

Version: Svenska

Skrivtid: 4 timmar 30 minuter
Frågor får ställas under första halvtimmen.
Endast rit- och skrivdon är tillåtna hjälpmedel.

Problem 1 Existerar det en följd av heltal $a_1, a_2, \ldots$ så att för varje heltal $d \neq 0$ finns det exakt 2025 distinkta par av index (i, j) för vilka $a_i - a_j = d$?

Problem 2 Låt $a_1, a_2, \ldots$ vara en följd av reella tal så att

$$\{a_n\}\lfloor a_{n+1}\rfloor = \lfloor a_n\rfloor\{a_{n+1}\}$$

för varje positivt heltal n. Visa att det finns ett reellt tal λ så att $\{a_m\}\lfloor a_m\rfloor = \lambda$ för oändligt många positiva heltal m.

Anmärkning: För ett reellt tal x betecknar $\lfloor x\rfloor$ det största heltalet som inte överskrider x och $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$.

Problem 3 Låt $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vara en funktion som uppfyller

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y)$$

för alla $x, y \in \mathbb{Q}$. Visa att det existerar ett $\alpha \in \mathbb{R}$ så att $f(x) \geq \alpha x$ för alla $x \in \mathbb{Q}$.

Problem 4 Finn alla funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så att

$$(f(a-c) + f(b-d))\,(f(a) + f(b)) = f(ad - bc) + f\,(f(a) + f(b) - ac - bd)$$

för alla reella tal a, b, c, d.

Problem 5 Låt n vara ett positivt heltal och låt $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ vara positiva reella tal som uppfyller

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{x_1^2 + x_n^2}{2}.$$

Visa att

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n x_1 x_n.$$

Problem 6 Låt $n \geq 3$ vänner spela killerboll. I början av spelet är alla fria. När en fri spelare A slår ut en annan fri spelare B händer följande: B fångas av A och alla B:s fångar vid denna tidpunkt befrias av A. Två utslag kan inte pågå samtidigt.

Finn det minsta antalet utslag efter vilka det är möjligt att för varje par av spelare har åtminstone en av spelarna befriat den andra spelaren under spelets gång.

Problem 7 Låt n vara ett jämnt positivt heltal. En $n \times n \times n$ kub består av n^3 enhetskuber. En mängd av n enhetskuber som bildar en $1 \times 1 \times n$ låda kallas för en *nål*, som kan ha tre riktningar. Finn det största heltalet K så att det är möjligt att välja $3K$ nålar, K i varje riktning, så att inga två av dem delar en enhetskub.

Problem 8 En följd av icke-negativa heltal $a_1, \ldots, a_n$ kallas *själv-beskrivande* om

$$a_k = |\{i \mid a_i \geq k\}|$$

för varje $k \in \{1, \ldots, n\}$, d.v.s. om a_k är lika med antalet element av följden som är större än eller lika med k för varje $k \in \{1, \ldots, n\}$.

För varje positivt heltal n, bestäm antalet själv-beskrivande följder av längd n.

Problem 9 En *baltisk polyiamond* är en n-hörning med sidlängderna $n, n-1, \ldots, 2, 1$ exakt i den ordningen och varje innervinkel antingen $120°$ eller $240°$. Visa att för varje baltisk polyiamond är n delbart med 6.

Problem 10 Ett positivt heltal med 9 siffror kallas *trevligt* om det innehåller varje siffra från 1 till 9. Ett tal kallas *underbart* om det är trevligt och för varje $k = 1, \ldots, 9$ gäller det att den k:te siffran är lika med positionen av k i talet. Till exempel är 847296315 underbart:

- Första siffran är 8, vilket är positionen av 1 i talet.
- Andra siffran är 4, vilket är positionen av 2 i talet.
- Tredje siffran är 7, vilket är positionen av 3 i talet, o.s.v.

Visa att antalet underbara tal är jämnt.

Problem 11 Låt $A_1, \ldots, A_n$ vara en följd av punkter i det euklidiska planet. Punkterna får sammanfalla, men följden innehåller minst två distinkta punkter. En *baltisk kedja* är en rutt definierad av en permutation $B_1, \ldots, B_n$ av punkterna $A_1, \ldots, A_n$. Längden på en baltisk kedja är

$$|B_1B_2| + |B_2B_3| + \cdots + |B_{n-1}B_n| + |B_nB_1|,$$

där $|PQ|$ betecknar det euklidiska avståndet mellan punkterna P och Q.

Låt K och L vara längderna på två baltiska kedjor definierade av permutationer av samma följd av n punkter. Bestäm för ett givet n det största möjliga värdet på K/L över alla möjliga följder $A_1, \ldots, A_n$.

Problem 12 I en spetsvinklig triangel ABC där $AB < AC$ är den inskrivna cirkelns medelpunkt I och den omskrivna cirkeln ω. Linjen AI skär sidan BC i D. Låt T vara punkten på ω så att $AT \parallel BC$. Linjen TI skär ω igen i P och den omskrivna cirkeln av triangeln APD igen i Q. Visa att $AI = DQ$.

Problem 13 I en inskriven fyrhörning $ABCD$ skär linjerna AB och CD varandra i E. Punkten P ligger inuti $ABCD$ och uppfyller

$$\angle BAP = \angle PCB \quad \text{och} \quad \angle CBP = \angle PDC.$$

Visa att $PE \perp BC$.

Problem 14 I en spetsvinklig triangel ABC där $AB < AC$ är den omskrivna cirkeln ω och höjdernas skärningspunkt H. Punkten P på bågen BC som innehåller A uppfyller $\angle PCB + \angle ACB = 90°$. Punkten R på sträckan AC uppfyller $BR = CR$. Visa att $\angle HPR = \angle ACB$.

Problem 15 I en spetsvinklig triangel ABC där inga två sidor är lika långa skär mittpunktsnormalen av sidan BC linjerna AC och AB i A_b respektive A_c. Definiera B_c, B_a, C_a och C_b på liknande sätt. Visa att medelpunkterna av de omskrivna cirklarna av trianglarna ABC, $A_bB_cC_a$ och $A_cB_aC_b$ är kolinjära.

Problem 16 Låt a, b, c, n vara positiva heltal som uppfyller $abc = 10^n - 1$. Om $S(x)$ betecknar siffersumman av x i bas 10, visa att

$$S(a) + S(b^2) + S(c^4) \geq \sqrt[3]{243n}.$$

Problem 17 Ett positivt heltal kallas *briljant* om dess positiva delare kan delas upp i två lika stora mängder så att summan av alla element är densamma för varje mängd.

Finn alla möjliga värden på antalet positiva delare till ett briljant tal.

Problem 18 Finn alla funktioner $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ så att $f(2) = 1$ och

$$\operatorname{mgm}(f(a+b), f(b)) \mid \operatorname{mgm}(a + f(b), b)$$

för alla positiva heltal a, b.

Problem 19 Det står 100 positiva heltal skrivna på en tavla. Anna spelar ett spel. Ett drag består av att välja två heltal a och b på tavlan med egenskapen att $a \mid b$, sudda ut dem och skriva heltalet b/a. Hon gör drag tills det inte går att göra fler och då avslutas spelet.

Finn det största N så att för någon initial uppsättning av tal på tavlan kan Anna både

- avsluta spelet med endast ett tal kvar och
- avsluta spelet med N tal kvar.

Problem 20 Bestäm alla positiva heltal n så att det existerar en permutation $a_1, \ldots, a_n$ av $1, \ldots, n$ där talen $a_1, 2a_2, \ldots, na_n$ är parvis distinkta modulo n.