Baltic Way

15 листопада 2025, Рига, Латвія

Version: Ukrainian

Час написання: 4 години та 30 хвилин
Питання по умовах можна ставити протягом перших 30 хвилин.
Використання будь-яких електронних та механічних пристроїв заборонено.

Задача 1 Чи існує послідовність цілих чисел $a_1, a_2, \ldots$ така, що для кожного цілого $d \neq 0$ існує рівно 2025 різних пар індексів (i, j) для яких $a_i - a_j = d$?

Задача 2 Нехай $a_1, a_2, \ldots$ - послідовність дійсних чисел така, що

$$\{a_n\}\lfloor a_{n+1}\rfloor = \lfloor a_n\rfloor\{a_{n+1}\}$$

для кожного додатного цілого n. Доведіть, що існує таке дійсне число λ, що $\{a_m\}\lfloor a_m\rfloor = \lambda$ для нескінченної кількості цілих додатніх чисел m.

Зауваження: Для дійсного числа x, $\lfloor x\rfloor$ позначає найбільше ціле число, що не перевищує x, та $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$.

Задача 3 Нехай $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ - функція, що задовольняє нерівність

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y)$$

для усіх $x, y \in \mathbb{Q}$. Покажіть, що існує деяке $\alpha \in \mathbb{R}$ таке, що $f(x) \geq \alpha x$ для усіх $x \in \mathbb{Q}$.

Задача 4 Знайдіть усі функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що

$$(f(a-c) + f(b-d))\,(f(a) + f(b)) = f(ad - bc) + f\,(f(a) + f(b) - ac - bd)$$

для усіх дійсних чисел a, b, c, d.

Задача 5 Нехай n - ціле додатне число та нехай $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ - додатні дійсні числа, що задовольняють рівність

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{x_1^2 + x_n^2}{2}.$$

Доведіть, що

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n x_1 x_n.$$

Задача 6 Нехай $n \geq 3$ друзів грають у вибивали. На початку всі гравці вільні. Коли вільний гравець A *вибиває* іншого вільного гравця B, A ув'язнює B та звільняє всіх гравців, які наразі ув'язнені гравцем B. Два вибивання не можуть трапитись одночасно.

Знайдіть найменшу кількість вибивань, після яких можливо, що серед кожних двох гравців принаймні один звільнив іншого.

Задача 7 Нехай n — парне додатне ціле число. Куб $n \times n \times n$ складається з n^3 одиничних кубиків. Набір з n одиничних кубиків, що утворює $1 \times 1 \times n$ призму, називається *голкою*, яка може мати одну з трьох орієнтацій. Знайдіть найбільше ціле число K, таке, що можна вибрати $3K$ голок, K в кожній орієнтації, так, що кожні дві голки з набору не мають спільних одиничних кубиків.

Задача 8 Послідовність невід'ємних цілих чисел $a_1, \ldots, a_n$ називається *самоописною*, якщо

$$a_k = |\{i \mid a_i \geq k\}|$$

для кожного $k \in \{1, \ldots, n\}$, тобто a_k дорівнює кількості елементів послідовності, які більші або дорівнюють k, для кожного $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Для кожного додатного цілого числа n, визначте кількість самоописних послідовностей довжини n.

Задача 9 *Балтійський поліамант* — це n-кутник із довжинами сторін $n, n-1, \ldots, 2, 1$ саме в такому порядку, і всі внутрішні кути якого рівні $120°$ або $240°$. Доведіть, що для кожного Балтійського поліаманту, n ділиться націло на 6.

Задача 10 Ціле додатне число з 9 цифрами називається *гарним*, якщо воно містить кожну цифру від 1 до 9. Число називається *чарівним*, якщо воно є гарним і для кожного $k = 1, \ldots, 9$ виконується наступна умова: k-та цифра в числі дорівнює позиції цифри k у цьому ж числі. Наприклад, 847296315 є чарівним:

- перша цифра — 8, що відповідає позиції 1 у числі,
- друга цифра — 4, що відповідає позиції 2 у числі,
- третя цифра — 7, що відповідає позиції 3 у числі, і так далі.

Покажіть, що кількість чарівних чисел є парною.

Задача 11 Дано $A_1, \ldots, A_n$ - послідовність точок Евклідової площини. Деякі з точок послідовності можуть збігатись, але послідовність містить хоча б дві різні точки. *Балтійським шляхом* назвемо маршрут, визначений перестановкою $B_1, \ldots, B_n$ точок $A_1, \ldots, A_n$. Довжину Балтійського шляху визначимо, як

$$|B_1B_2| + |B_2B_3| + \cdots + |B_{n-1}B_n| + |B_nB_1|,$$

де $|PQ|$ позначає звичайну Евклідову відстань між точками P та Q.

Нехай K та L - довжини двох деяких Балтійських шляхів на одній і тій самій послідовності n точок. Для фіксованого n, визначте найбільше можливе значення виразу K/L для всіх можливих послідовностей точок $A_1, \ldots, A_n$.

Задача 12 У гострокутному трикутнику ABC, у якого $AB < AC$, інцентр знаходиться у точці I та описане коло позначене як ω. Пряма AI перетинає сторону BC у точці D. Нехай T така точка на ω, що $AT \parallel BC$. Пряма TI перетинає ω вдруге у точці P та описане коло трикутника APD вдруге у точці Q. Доведіть, що $AI = DQ$.

Задача 13 У циклічному чотирикутнику $ABCD$, прямі AB та CD перетинаються у точці E. Точка P лежить усередині $ABCD$ та задовольняє

$$\angle BAP = \angle PCB \quad \text{та} \quad \angle CBP = \angle PDC.$$

Доведіть, що $PE \perp BC$.

Задача 14 У гострокутному трикутнику ABC, у якого $AB < AC$, описане коло позначене як ω та ортоцентр знаходиться у точці H. Точка P знаходиться на дузі $\overset{\frown}{BAC}$ кола ω та задовольняє $\angle PCB + \angle ACB = 90°$. Точка R на відрізку AC задовольняє $BR = CR$. Доведіть, що $\angle HPR = \angle ACB$.

Задача 15 У гострокутному різносторонньому трикутнику ABC, серединний перпендикуляр відрізка BC перетинає AC та AB в A_b та A_c, відповідно. Визначимо точки B_c, B_a, C_a та C_b аналогічно. Доведіть, що центри описаних кіл трикутників $ABC, A_bB_cC_a$, та $A_cB_aC_b$ - колінеарні.

Задача 16 Дано a, b, c, n - цілі додатні числа, що задовольняють $abc = 10^n - 1$. Нехай $S(x)$ позначає суму цифр числа x у десятковому записі. Доведіть, що

$$S(a) + S(b^2) + S(c^4) \geq \sqrt[3]{243n}.$$

Задача 17 Ціле додатне число називається *потужним* якщо усі його додатні дільники можна розбити на дві множини з однаковою кількістю елементів та однаковою сумою елементів.

Знайдіть усі можливі значення кількості додатніх дільників потужного числа.

Задача 18 Знайдіть усі функції $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ такі, що $f(2) = 1$ та

$$[f(a+b), f(b)] \mid [a + f(b), b]$$

для усіх додатніх цілих a, b.

Зауваження: $[a, b]$ позначає НСК двох чисел a та b.

Задача 19 На дошці написано 100 цілих додатніх чисел. Марина грає в гру. Хід полягає у виборі двох цілих чисел a та b на дошці з властивістю, що $a \mid b$, стиранні їх обох і записуванні цілого числа b/a. Вона робить ходи, поки не залишиться більше дозволених ходів, після чого гра закінчується.

Знайдіть найбільше N таке, що існує деякий початковий набір із 100 чисел, що Марина може одночасно:

- закінчити гру, залишивши на дошці тільки одне число, і
- закінчити гру, залишивши на дошці N чисел.

Задача 20 Визначте всі цілі додатні n, для яких існує перестановка $a_1, \ldots, a_n$ набору $1, \ldots, n$, де числа $a_1, 2a_2, \ldots, na_n$ всі попарно різні за модулем n.