Eystrasaltskeppnin

15. nóvember 2025, Ríga, Lettlandi

Version: Icelandic

Tímamörk: 4 klukkustundir og 30 mínútur.
Spurningar eru leyfðar fystu 30 mínúturnar
Einungis skriffæri og teiknáhöld eru leyfð.

Dæmi 1 Er til runa $a_1, a_2, \ldots$ af heiltölum með þann eiginleika að fyrir sérhverja heiltölu $d \neq 0$ séu nákvæmlega 2025 ólík pör af vísum (i, j) þannig að $a_i - a_j = d$?

Dæmi 2 Látum $a_1, a_2, \ldots$ vera runu af rauntölum þannig að

$$\{a_n\}\lfloor a_{n+1}\rfloor = \lfloor a_n\rfloor\{a_{n+1}\}$$

fyrir sérhverja jákvæða heiltölu n. Sannið að til sé rauntala λ þannig að $\{a_m\}\lfloor a_m\rfloor = \lambda$ fyrir óendanlega margar jákvæðar heiltölur m.

Athugasemd: Fyrir rauntölu x, látum við $\lfloor x\rfloor$ tákna stærstu heiltöluna sem er ekki stærri en x og auk þess er $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$.

Dæmi 3 Látum $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vera fall sem fullnægir

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y)$$

fyrir öll $x, y \in \mathbb{Q}$. Sýnið að til sé $\alpha \in \mathbb{R}$ þannig að $f(x) \geq \alpha x$ fyrir öll $x \in \mathbb{Q}$.

Dæmi 4 Finnið öll föll $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ þannig að

$$(f(a-c) + f(b-d))\,(f(a) + f(b)) = f(ad - bc) + f\,(f(a) + f(b) - ac - bd)$$

fyrir allar rauntölur a, b, c, d.

Dæmi 5 Látum n vera jákvæða heiltölu og látum $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ vera jákvæðar rauntölur sem fullnægja

$$\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \frac{x_1^2 + x_n^2}{2}.$$

Sannið að

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n x_1 x_n.$$

Dæmi 6 Látum $n \geq 3$ vini spila skotbolta saman. Í byrjun eru allir leikmenn frjálsir. Þegar frjáls leikmaður A *slær út* annan frjálsan leikmann B, þá tekur A B til fanga og frelsar all leikmenn sem voru í haldi B á þeim tímapunkti. Engir tveir leikmenn eru slegnir út samtímis.

Finnið minnsta fjölda útslátta þannig að í lokinn geti gilt að meðal sérhverra tveggja leikmanna hefur að minnsta kosti annar frelsað hinn.

Dæmi 7 Látum n vera slétta jákvæða heiltölu. Teningur af vídd $n \times n \times n$ samanstendur af n^3 einingarteningum. Mengi af n einingarteningum sem myndar $1 \times 1 \times n$ kassa er kallaður *nál*, sem snýr í einhverja af þremur áttunum. Finnið stærstu heiltöluna K, þannig að unnt sé að velja $3K$ nálar, K í hverja átt, þannig að engar tvær þeirra deili einingartening.

Dæmi 8 Runa $a_1, \ldots, a_n$ af heiltölum, sem eru stærri en eða jafnar 0, er sögð vera *sjálflýsandi* ef

$$a_k = |\{i \mid a_i \geq k\}|$$

fyrir sérhvert $k \in \{1, \ldots, n\}$. Með öðrum orðum a_k er jafnt fjölda staka í rununni sem eru stærri en eða jöfn k, fyrir sérhvert $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Ákvarðið fjölda sjálflýsandi runa af lengd n, fyrir sérhverja jákvæða heiltölu n.

Dæmi 9 *Eystrasalts fjölantur* er n-hyrningur með hliðarlengdir $n, n-1, \ldots, 2, 1$ í þessari röð og innri horn $120°$ eða $240°$. Sannið að fyrir sérhvern eystrasalts fjölant sé n deilanleg með 6.

Dæmi 10 Níu tölustafa jákvæð heiltala er sögð vera *blíð* ef hún inniheldur alla tölustafina 1 til 9. Tala er sögð vera *stórfengleg* ef hún er blíð og fyrir sérhvert $k = 1, \ldots, 9$ gildir að k-ti tölustafurinn í tölunni sé jafn sæti tölustafsins k í tölunni. Til dæmis er 847296315 stórfengleg:

- fyrsti tölustafurinn er 8 sem er sæti tölustafsins 1 í tölunni,
- annar tölustafurinn er 4 sem er sæti tölustafsins 2 í tölunni,
- þriðji tölustafurinn er 7 sem er sæti tölustafsins 3 í tölunni, og svo framvegis.

Sýnið að fjöldi stórfenglegra talna sé sléttur.

Dæmi 11 Látum $A_1, \ldots, A_n$ vera runu af punktum í evklíðsku sléttunni. Einhverjir punktanna mega vera þeir sömu en runan inniheldur að minnsta kosti tvo ólíka punkta. *Eystrasaltskeðja* er vegur sem er skilgreindur með umröðun $B_1, \ldots, B_n$ á punktunum $A_1, \ldots, A_n$. Lengd eystrasaltskeðju er

$$|B_1B_2| + |B_2B_3| + \cdots + |B_{n-1}B_n| + |B_nB_1|,$$

þar sem $|PQ|$ táknar evklíðsku fjarlægðina á milli P og Q.

Látum K og L vera lengdir einhverra tveggja eystrasaltskeðja á sömu runu n punkta. Fyrir gefið n, ákvarðið stærsta gildið sem K/L getur tekið fyrir allar leyfilegar runur $A_1, \ldots, A_n$.

Dæmi 12 Hvasshyrndur þríhyringur ABC með $AB < AC$ hefur innmiðju I og umhring ω. Línan AI sker hliðina BC í D. Látum T vera punktinn á ω þannig að $AT \parallel BC$. Línan TI sker ω aftur í P og umhring þríhyrningsins APD aftur í Q. Sannið að $AI = DQ$.

Dæmi 13 Gefinn er rásaður ferhyrningur $ABCD$. Línurnar AB og CD skerast í punkti E. Punktur P liggur innan í $ABCD$ og fullnægir

$$\angle BAP = \angle PCB \quad \text{og} \quad \angle CBP = \angle PDC.$$

Sannið að $PE \perp BC$.

Dæmi 14 Hvasshyrndur þríhyrningur ABC með $AB < AC$ hefur umhring ω og hæðarmiðju H. Punkturinn P á stærri boganum BC á ω fullnægir $\angle PCB + \angle ACB = 90°$. Punkturinn R á strikinu AC fullnægir $BR = CR$. Sannið að $\angle HPR = \angle ACB$.

Dæmi 15 Hvasshyrndur þríhyrningur ABC hefur allar hliðar mislangar. Miðþverill BC sker AC og AB í A_b og A_c, í tilsvarandi röð. Við skilgreinum B_c, B_a, C_a og C_b með tilsvarandi hætti. Sannið að ummiðjur þríhyringanna ABC, $A_bB_cC_a$ og $A_cB_aC_b$ liggi á sömu línu.

Dæmi 16 Látum a, b, c, n vera jákvæðar heiltölur sem fullnægja $abc = 10^n - 1$. Ef $S(x)$ táknar þversummu x í tugakerfinu, sannið að

$$S(a) + S(b^2) + S(c^4) \geq \sqrt[3]{243n}.$$

Dæmi 17 Jákvæð heiltala er sögð vera *tindrandi* ef skipta má jákvæðu deilum hennar í tvö mengi sem hafa jafn mörg stök og sömu summu staka.

Finnið öll hugsanleg gildi sem eru fjöldi jákvæðra deila einhverrar tindrandi tölu.

Dæmi 18 Finnið öll föll $f\colon \mathbb{Z}_{>0} \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ þannig að $f(2) = 1$ og

$$\operatorname{lcm}(f(a+b), f(b)) \mid \operatorname{lcm}(a + f(b), b)$$

fyrir sérhverjar jákvæðar heiltölur a og b.

Dæmi 19 Á töflu eru skrifaðar 100 jákvæðar heiltölur. Sófus spilar leik. Í hverjum leik velur Sófus tvær tölur a og b á töflunni þannig að $a \mid b$, þurkar báðar þeirra út og skrifar heiltöluna b/a. Hann heldur áfram að leika þar til hann getur það ekki lengur og þá lýkur leiknum.

Finnið stærsta N þannig að fyrir einhverja upphafsstöðu geti Sófus bæði:

- lokið leiknum með aðeins eina tölu á töflunni, og
- lokið leiknum með N tölum á töflunni.

Dæmi 20 Ákvarðið allar jákvæðar heiltölur n þannig að til sé umröðun $a_1, \ldots, a_n$ á $1, \ldots, n$, þar sem tölurnar $a_1, 2a_2, \ldots, na_n$ eru allar í ólíkum leifaflokkum mát n.